**Объем и его измерения. Интегральная формула объема.**

﻿**Объём тела** это положительная величина, характеризующая часть пространства, занимаемую телом, и обладающая следующими **основными свойствами**:

* равные тела имеют равные объемы; при параллельном переносе тела его объем не изменяется;
* если тело разбить на части, являющиеся простыми телами, то объем тела равен объему его частей;
* за единицу объема принят объем куба, ребро которого равно единице длины;



**Следствие**

Возьмём куб с объёмом, принятым за единицу измерения объёма. Его ребро равно единице измерения длины отрезков. Выберем три ребра, сходящиеся к одной вершине. Разобьём каждое из этих рёбер на n равных частей (n - произвольное целое число, в случае кубика Рубика n равно трём) и проведём через точки разбиения каждого плоскости, перпендикулярные к этому ребру. Весь куб разобьётся на равных маленьких кубов с ребром . Так как объём исходного куба равен одному, то объём каждого маленького куба будет равен .

Этот факт нам понадобится при выводе теоремы об объёме прямоугольного параллелепипеда.

**Теорема**

Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению трёх его измерений.

**Доказательство**

Обозначим измерения прямоугольного параллелепипеда P буквами a, b, c, его объём буквой V, и докажем, что .

Могут представиться два случая.

**Первый случай**

Измерения а, b и c представляют собой конечные десятичные дроби, у которых число знаков после запятой не превосходит n (можно считать, что ). В этом случае числа ,  ,  являются целыми. Разобьём каждое ребро параллелепипеда на равные части длины и через точки разбиения проведём плоскости, перпендикулярные к этому ребру. Параллелепипед P разобьётся на  равных кубов с ребром . Так как объём каждого куба равен   что мы доказали ранее, то объём всего параллелепипеда P равен  , что и требовалось доказать.

**Второй случай**

Хотя бы одно из измерений а, b и c представляет собой бесконечную десятичную дробь. Рассмотрим конечные десятичные дроби an, bn, cn которые получаются из чисел а, b, c, если отбросить в каждом из них все цифры после запятой, начиная с n+1. Очевидно,  , где  , и аналогичные неравенства справедливы для b и c. Перемножив эти неравенства, получим  , где  , .

По доказанному в первом случае левая часть неравенства представляет собой объём  прямоугольного параллелепипеда  с измерениями  ,  ,  , а правая часть это объём  прямоугольного параллелепипеда  с измерениями ,  , . Так как параллелепипед P содержит в себе параллелепипед  , а сам содержится в параллелепипеде  , то объём V параллелепипеда P заключён между  и  . Будем неограниченно увеличивать n. Тогда  будет становиться сколь угодно малым, и поэтому  будет сколь угодно мало отличаться от числа  . Отсюда следует, что число V сколь угодно мало отличается от числа  , а значит они равны. , что и требовалось доказать.

Очень важным следствием данной теоремы является другая форма записи для объёма параллелепипеда, если мы рассмотрим его как одну из разновидностей призмы.

**Следствие**

Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.

**Докажем**

В самом деле, примем грань с рёбрами a и b за основание. Тогда площадь , высота h параллелепипеда равна c. Следовательно,  .



Свойство жидкости заполнять резервуар в нижней части позволяет также измерять объём твёрдых тел, используя метод погружения тела в жидкость и измеряя увеличение уровня жидкости в резервуаре с прямоугольным дном и вертикальными стенками. Проводя измерения объёма тела сложной формы, Архимед пришёл к открытию своего знаменитого «Закона Архимеда». Действительно, при погружении в жидкость, тело вытесняет ровно столько жидкости, каков объём самого тела.

Данное следствие нам очень пригодится при изучении формулы вычисления объёма призм и цилиндра.

**Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля.**

Объём раствора в гальванической ванне равен V куб.м, при этом уровень раствора достигает H см. В ванну погрузили деталь, после чего уровень раствора поднялся на h см. Поставьте в соответствие размеры гальванической ванны и деталь, которая в неё погружается.

Таблица 1.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Номер ванны | V ванны | Н раствора |
| 1 | 1 | 50 |
| 2 | 2 | 50 |
| 3 | 3 | 50 |
| 4 | 6 | 75 |
| 5 | 10 | 200 |

Таблица 2.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Номер детали | h уровня | V детали |
| 1 | 3 | 0,12 |
| 2 | 5 | 0,1 |
| 3 | 12 | 0,6 |
| 4 | 20 | 1,2 |
| 5 | 25 | 2,0 |

Для того, чтобы определить какую деталь в какую ванну погружали необходимо определить площадь дна каждой ванны, а затем определить какую площадь дна имела ванна, в которую погружали деталь.

Дополним таблицу ещё одним столбцом, определяя площадь дна ванны по формуле 

Таблица 3.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Номер ванны | V ванны, м3 | Н раствора, см | https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4904/20190201120413/OEBPS/objects/c_geom_11_11_1/5f70d5ab-17f2-41d7-9770-d591337f8f41.png , м2 |
| 1 | 1 | 50 | 2 |
| 2 | 2 | 50 | 4 |
| 3 | 3 | 50 | 6 |
| 4 | 6 | 75 | 8 |
| 5 | 10 | 200 | 5 |

Таблица 4.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Номер детали | h уровня, см | V детали, м3 | https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4904/20190201120413/OEBPS/objects/c_geom_11_11_1/0178d507-8c88-4b62-a31c-dcb664cacd44.png , м2 |
| 1 | 3 | 0,12 | 4 |
| 2 | 5 | 0,1 | 2 |
| 3 | 12 | 0,6 | 5 |
| 4 | 20 | 1,2 | 6 |
| 5 | 25 | 2,0 | 8 |

Из сопоставления данных о площади дна ванн делаем вывод и ставим в соответствие:

1 деталь – 2 ванна

2 деталь – 1 ванна

3 деталь – 5 ванна

4 деталь – 3 ванна

5 деталь – 4 ванна

**Решите задачу**

Дан прямоугольный параллелепипед ABMQDCNP так, что М совпадает с началом координат, N лежит на оси абсцисс, B на оси ординат, Q на оси аппликат. Вершина D имеет координаты (8;6;3). Задано несколько точек, одна из которых О1находится внутри параллелепипеда. Координаты (9;1;2) (7;4;2) (4;-1;5) (4;5;4) . Определите какие координаты у О1, остальные игнорируйте. Определите объём всех восьми параллелепипедов, которые образуются при разбиении тремя плоскостями, проходящими через O1и параллельно граням параллелепипеда.

**Решение**

На первом шаге необходимо определить, какая из четырёх точек находится внутри параллелепипеда. Координаты этой точки по абсциссе, ординате и аппликате не должны быть меньше соответствующих координат вершины М и не должны быть больше соответствующих координат вершины D. Этим критериям соответствует точка с координатами (7;4;2) . Очевидно это и есть точка О1.Далее вычисляем объём всех восьми образовавшихся параллелепипедов, оперируя координатами вершин с самым маленьким и с самым большим значением по всем трём осям каждого параллелепипеда. Разность между соответствующими координатами вдоль оси абсцисс, оси ординат и оси аппликат будет определять размеры рёбер вдоль этих трёх осей. Перемножая эти величины, получаем объём всех восьми малых тел. В качестве проверки сложим все восемь объёмов. В результате должны получить на основании свойства объёмов объём исходного параллелепипеда.

1. При вершине М = 7\*4\*2= 56
2. При вершине B = 7\*(6-4)\*2= 28
3. При вершине Q = 7\*4\*(3-2)= 28
4. При вершине N = (8-7)\*4\*2= 8
5. При вершине A = 7\*(6-4)\*(3-2)= 14
6. При вершине C = (8-7)\*(6-4)\*2= 4
7. При вершине P = (8-7)\*4\*(3-2)= 4
8. При вершине D = (8-7)\*(6-4)\*(3-2) = 2

Исходный параллелепипед имеет объём 56+28+28+8+14+4+4+2=144,

Что соответствует исходным данным  . Объёмы малых тел, полученных при разбиении, определены верно. На смежном графе должна отобразиться ломаная линия в форме цифры пять.

Вывод формулы для вычисления объемов тел, основанной на понятии интеграла

1) Пусть тело Т, объем которого надо вычислить, заключено между двумя параллельными плоскостями α и β. Введем систему координат: - ось ох перпендикулярна α и β; а и b - абсциссы точек пересечения оси ох с этими плоскостями (а < b).



Считаем, что сечение Ф(х) плоскостью, проходящей через точку с абсциссой х и перпендикулярно к оси ох, является кругом, либо многоугольником для любого х ∈ [а, b] (при а = х и b = х в сечение может вырождаться точка, например, при х = а).

2) Пусть S(x) - площадь Ф(x), зависимости S(x) - непрерывная функция на числовом отрезке [а, b]. Разобьем отрезок [а, b] на n равных отрезков точками  и через точки с абсциссами xi проведем плоскости, перпендикулярные ох. Они разобьют тело Т на n тем: Т1...,Тn; - если сечение Ф(xi) - круг, то  с основанием Ф(xi) и высотой  - если Ф(xi) - многоугольник, то  с основанием Ф(xi) и высотой Δxi. В любом случае:  

Приближенное значение Vn объема тела Т точнее с увеличением n и уменьшением Δxi.

3) Причем 

С другой стороны: сумма Vn - интегральная сумма для непрерывной функции S(x) на числовом отрезке [а, b].



Изучить теоритический материал, разобрать решение задач.

1. Геометрия10 – 11кл. Л.С.Атанасян - М.:Просвещение 2019

Домашнее задание: п.52, п.56-59, №441

задания для проверки присылайте на электронную почту: asd20022006@yandex.ru